

DOI: 10.16285/j.rsm.2016.S2.089

一种求解应变软化岩体中球腔问题的数值方法

蒋 欢¹, 王水林¹, 王万军²

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所, 湖北 武汉 430071; 2. 特变电工电力设计有限责任公司, 陕西 西安 710117)

摘 要: 均匀地应力场中球形洞室开挖问题可以简化为空间轴对称问题, 为分析和评价球形洞室开挖的稳定性, 采用有限差分方法对平衡方程与变形协调方程进行离散, 将洞室围岩潜在塑性区划分为一系列的球壳, 并考虑岩体的应变软化行为, 可以得到满足线性 Mohr-Coulomb (H-C) 准则和非线性 Hoek-Brown (H-B) 屈服准则的围岩体塑性区范围及相应的应力与变形分布。计算结果表明, 随着离散步的增加, 数值解逐渐收敛, 文中解与已有文献的结果完全吻合, 且计算效率更高。对一组强度参数遵循 CWFS (黏聚力弱化与摩擦角强化) 规律的围岩体内塑性区范围、变形与应力的分布进行了分析, 并与常规的应变软化模型的计算结果进行了对比, CWFS 模型的结果更合理一些。

关 键 词: 应变软化; 球腔; 屈服准则; 有限差分逼近; 数值解

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2016) 增 2-0697-09

A numerical method for analyzing problems of a spherical cavity in strain-softening rock mass

JIANG Huan¹, WANG Shui-lin¹, WANG Wan-jun²

(1. Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China;

2. TBEA Xi'an Electric Design Limited Liability Company, Xian, Shaanxi 710117, China)

Abstract: Excavation of a spherical cavity in an infinite isotropic rock mass subject to a hydrostatic stress field can be regarded as an axisymmetric problem. In order to analyze and evaluate the stability of the excavation of 3D spherical cavity, by invoking the finite difference approximation of the equilibrium and compatibility equations, the distributions of displacement and stress in the potential plastic zone which is divided into a series of spherical shell can be obtained from the outmost shell for which the boundary is known to innermost of the spherical cavity in a successive manner. Linear strain-softening behavior is taken into account, and linear Mohr-Coulomb(H-C) criterion and nonlinear Hoek-Brown(H-B) yield criterion are employed respectively in the procedure. With the increment of the number of the spherical shell, a convergent numerical solution is gotten, and the presented procedure is validated through case studies. On the basis of it, a set of strength parameters which obey cohesion weakening and frictional strengthening law(CWFS model) is studied and the corresponding solution is analyzed. Comparisons of the results from CWFS model and the normal strain-softening model are made and the results from CWFS model seem more reasonable.

Keywords: strain-softening; spherical cavity; yield criterion; finite difference approximation; numerical solution

1 引 言

岩土材料的本构关系可分为理想弹塑性、弹脆塑性、应变硬化和应变软化关系, 前 3 种本构模型已有相当成熟的方法求解相关的问题, 而应变软化问题远比前几种复杂, 因为应变软化关系不满足应力空间中的 Drucker 公设, 峰值后的应力-应变关系

出现了负斜率, 导致传统的弹塑性理论中增量应力-应变矩阵出现奇异或者负定, 使得解变得不稳定或不惟一^[1-2]。

在岩土工程的实践中多数岩土材料在工程载荷作用下表现为应变软化, 研究应变软化问题的解析解或者研究模拟应变软化行为的数值方法具有重要的工程意义。

收稿日期: 2016-01-22

基金项目: 国家自然科学基金 (No.41472289, No.41130742, No.51179185); 国家重点基础研究发展计划 (973) 项目 (No.2014CB047100)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation (41472289, 41130742, 51179185) and the National Basic Research Program of China (973 Program) of China (2014CB047100).

第一作者简介: 蒋欢, 男, 1991 年生, 硕士研究生, 主要从事应变软化数值模拟方面的研究工作。E-mail: jjjjj@126.com

均匀初始应力场中圆形或球形洞室开挖问题是岩土工程中的基本问题之一。就圆形洞室问题而言, Brown 等^[3]综述了早期前人的工作,即考虑 Hoek-Brown 准则的弹脆塑性问题的封闭解和应变软化问题的数值解。Ogawa^[4]导出了隧洞围岩体内位移的解析解,研究了剪胀角和屈服准则的影响。Yu^[5]分别考虑了 Mohr-Coulomb(H-C)准则和 Hoek-Brown (H-B)准则提出了圆形洞室脆塑性问题的封闭解。Sharan^[6-7]改进了弹脆塑性问题的解,针对 H-B 准则,提出了弹脆塑性问题简单而准确的解答。Park 等^[8]针对以上工作做了简洁的述略,得出了分别考虑 Mohr-Coulomb 准则和 Hoek-Brown 准则的圆形洞室弹脆塑性问题的解析解,对比了塑性区域弹性应变的不同假设得出的位移结果。

对于应变软化问题, Brown 等^[3]是最早进行圆形洞室开挖问题分析的,随后 Alonso 等^[9]针对圆形洞室的应变软化问题得出了自相似解答 (self-similar solutions),并详细讨论了强度参数对地层响应曲线 (ground reaction curve) 的影响。Lee 等^[10]将圆形洞室围岩内形成的塑性区划分为一系列的同心圆环,对平衡方程和协调方程等进行差分离散,采用差分方法求解,得到了软化区与残余强度区尺寸以及相应的位移分布。Wang 等^[11]将应变软化问题的求解转化为求解一系列脆塑性问题,避免了直接采用经典的弹塑性理论分析应变软化过程出现的所谓“软化率的极限值”的限制问题,得出了有意义的解答。Lu 等^[12]基于 Hoek-Brown 准则提出了圆形洞室应变软化问题的解析解。

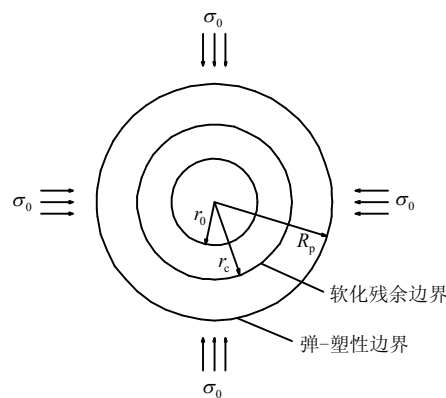
以上主要针对可以简化为平面应变情形的圆形洞室开挖问题而开展的研究,对于球形洞室开挖问题, Wang 等^[13-14]基于弹脆塑性理论得出了三维球腔弹脆塑性问题的封闭解,并进一步将本构模型拓展至应变软化问题,将峰值后区段分解为一系列脆塑性跌落过程,得出了对应问题的半解析解。

本文考虑三维球形洞室开挖问题(以下简称“球腔问题”),将 Lee 等^[10]提出的一种针对圆形洞室应变软化问题的差分方法拓广至空间球腔问题,将软化区域分为一系列同心球腔,然后利用差分方法进行求解,验证了方法与编制的程序的正确性,并对一组 CWFS 模型参数进行了分析。

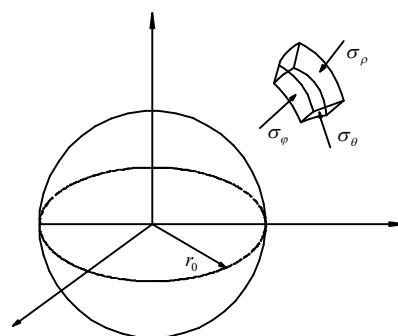
2 研究问题的描述

图 1 为在岩土体内开挖球形洞室的三维问题。由图可见,洞室内半径为 r_0 , 表面受内压 p_i 作用,在无限远区域受到静水压力 σ_0 , 随着内表面均匀分

布的压力沿开挖面不断的减小,洞室的开挖可以被看作应力不断被释放的过程,当洞壁内压小于某一极限值时,洞室围岩体内将形成一定范围的塑性区。支护内压越小,则塑性区半径越大。这些条件下由于问题的对称性,位移、应变、应力可以被表示成洞室半径的函数,而且 $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ 。



(a) 三维球腔塑性区分布



(b) 球腔围岩内主应力

图 1 三维球腔塑性区分布和球腔围岩主应力
Fig.1 Distribution of three-dimensional spherical cavity plastic zone and surrounding rock principal stresses of spherical cavity

2.1 岩土材料应力-应变曲线

如果将岩土材料在加载过程中的应力-应变关系划分为前区的弹性段与后区的塑性段,则岩土材料的本构关系可以用图 2 中的 4 条曲线即理想弹

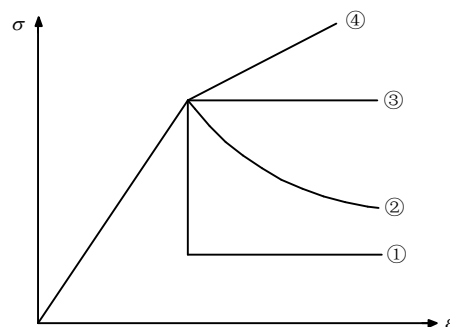


图 2 几种理想化的应力-应变曲线
Fig.2 Several idealized stress-strain curves

脆塑性①、应变软化②、理想弹塑性③和应变硬化④形象的描述。

在经典的弹塑性理论框架下，无论采用何种屈服准则、塑性势，理想弹塑性、应变硬化及弹脆塑性本构模型的数值模拟，均可参考相关教材及文献[13–15]，其中 Zheng 等^[15]从理论角度对脆塑性岩体的分析及其数值方法进行了系统地研究，指出采用经典弹塑性理论分析应变软化问题时应变软化的负斜率的绝对值应当小于某一极限值，否则弹塑性本构积分将是无意义的

2.2 弹性区拉梅解答

如果洞室围岩体在开挖过后仍处于弹性状态，位移和应力就可以通过拉梅解答得到，径向位移可以被表示成 $(\sigma_0 - p_i) / 4G(r_0^3 / r^2)$ ，其中 G 为剪切模量； r 为位移对应处的半径； σ_θ 、 σ_r 分别为最大主应力与最小主应力， σ_r 、 σ_θ 可以表示为

$$\sigma_r = \sigma_0 - (\sigma_0 - p_i)(r_0 / r)^3 \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\phi = \sigma_0 + 0.5(\sigma_0 - p_i)(r_0 / r)^3 \quad (2)$$

本文假定受压为正。

2.3 屈服准则与塑性势函数

岩土工程中较为常用的屈服准则是 M-C 准则和 H-B 准则，本文分别考虑这两个屈服准则。由于屈服准则的形式不一，为计算方便，参考文献[10]的形式，M-C 准则在主应力空间表达式为

$$F(\sigma_\theta, \sigma_r, \gamma^p) = \sigma_\theta - \sigma_r - H^{MC}(\sigma_r, \gamma^p) \quad (3)$$

式中： γ^p 为在应变软化过程中控制强度参数演化的软化参数，一般定义为偏塑性应变：

$$\gamma^p = \gamma_\theta^p - \gamma_r^p \quad (4)$$

虽然 Alonso 等^[9]认为没有普遍的方法定义应变软化参数，但式(4)是目前相关研究中被广泛接受的一种定义方式。式(3)中的 $H^{MC}(\sigma_r, \gamma^p)$ 为

$$H^{MC}(\sigma_r, \gamma^p) = (N(\gamma^p) - 1)\sigma_r + Y(\gamma^p) \quad (5)$$

N 、 Y 的公式为

$$\left. \begin{aligned} N(\gamma^p) &= \frac{1 + \sin \phi(\gamma^p)}{1 - \sin \phi(\gamma^p)} \\ Y(\gamma^p) &= \frac{2c(\gamma^p) \cos \phi(\gamma^p)}{1 - \sin \phi(\gamma^p)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中其他符号意义同前。

H-B 准则在主应力空间可以表示为

$$F(\sigma_\theta, \sigma_r, \gamma^p) = \sigma_\theta - \sigma_r - H^{HB}(\sigma_r, \gamma^p) \quad (7)$$

式中： ϕ 为内摩擦角； c 为黏聚力；

$$H^{HB}(\sigma_r, \gamma^p) = \sigma_c(\gamma^p) \left(m(\gamma^p) \frac{\sigma_r}{\sigma_c(\gamma^p)} + s(\gamma^p) \right)^{\alpha(\gamma^p)} \quad (8)$$

式中： σ_c 为岩体单轴抗压强度； m 、 s 、 α 为 H-B 准则的强度参数。为简便起见，这里 α 取 0.5 (α 详细的讨论参考文献[16])。

对于塑性势函数的选择，选取与 M-C 屈服准则形式相同的势函数，势函数可以表示为

$$G(\sigma_\theta, \sigma_r, \gamma^p) = \sigma_\theta - k(\gamma^p)\sigma_r \quad (9)$$

式中： $k(\gamma^p)$ 为剪胀系数，

$$k(\gamma^p) = \frac{1 + \sin \phi(\gamma^p)}{1 - \sin \phi(\gamma^p)} \quad (10)$$

式中： ϕ 为剪胀角。当 $\phi = \phi$ 时，此时塑性流动法则为关联的流动法则；当 $\phi \neq \phi$ 时，流动法则是非关联的。当 $k(\gamma^p) = 1$ ，屈服时就没有塑性体积应变发生。

依据流动法则可以得到径向塑性应变与环向塑性应变之间的关系：

$$d\varepsilon_r^p = -k(\gamma^p)d\varepsilon_\theta^p \quad (11)$$

2.4 参数的演化方程

式(5)、(10)、(11)中强度参数是 γ^p 的函数，在塑性阶段假定这些参数可以用塑性偏应变 γ^p 的线性函数来描述：

$$\omega(\gamma^p) = \begin{cases} \omega_p - (\omega_p - \omega_r) \frac{\gamma^p}{\gamma^{p*}}, & (0 < \gamma^p < \gamma^{p*}) \\ \omega_r, & (\gamma^p > \gamma^{p*}) \end{cases} \quad (12)$$

式中： ω 为 ϕ 、 c 、 m 、 s 、 ϕ ； γ^{p*} 为临界偏塑性应变，预示着残余状态的开始，其值应当由试验确定。下标“p”以及“r”分别代表峰值和残余值。

2.5 临界内压力 p_c

随着洞室内压减小，塑性区首先在洞壁处产生。当洞室表面内压小于某个临界值 p_c ，塑性区域就会形成。

对于 M-C 屈服准则，将式(1)、(2)代入式(3)，利用 $r = r_0$ 可得临界压力：

$$p_c^{M-C} = (3/2\sigma_0 - Y)/(N + 1/2) \quad (13)$$

式中： N 、 Y 为 $N(\gamma^p)$ 、 $Y(\gamma^p)$ 的峰值。

对于 H-B 屈服准则，将式(1)代入式(7)，

利用 $r = r_0$, 可得临界压力:

$$p_c^{H-B} = \sigma_0 - 2/3 \sigma_c (\sqrt{(m/3)^2 + m\sigma_0/\sigma_c + s - m/3}) \quad (14)$$

式中: m 、 s 分别为 $m(\gamma^p)$ 、 $s(\gamma^p)$ 的峰值。

根据式 (1), 当塑性区形成时弹塑性交界面上的径向应力 σ_R 是与临界内压 p_c 相等的, 即

$$\sigma_R = \sigma_r(R_p) = p_c \quad (15)$$

3 应变软化模型的求解过程

考虑应变软化模型时塑性区半径、应力和位移的解析解答是非常困难的, 将文献[10]中的方法推广至三维情形, 用差分方式求解三维球腔问题。

极坐标系下平衡方程、相容方程、应变-位移关系分别为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} &= 0 \\ \varepsilon_r &= \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

如图 3 所示, 将塑性区分成 n 个同心的球壳, 第 i 个球壳的两个边界用无量纲半径分别为

$$\rho_{(i-1)} = r_{(i-1)} / R_p; \quad \rho_{(i)} = r_{(i)} / R_p \quad (17)$$

式中: R_p 为塑性区半径。应注意, 每个球壳的厚度都是不同的, 在求解过程中自动确定, 具体在后文讨论。

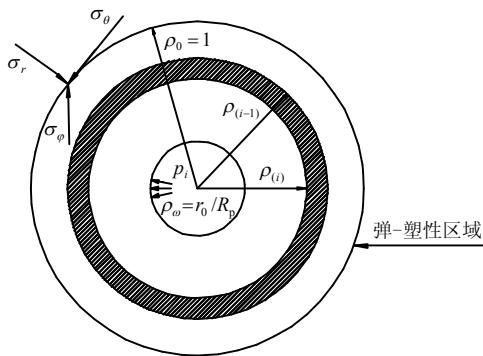


图 3 分成若干个球壳的塑性区域

Fig.3 Plastic zone with finite number of spherical shell

在塑性区的最外侧 $\rho_{(0)} = 1$, 应力和应变分量为

$$\begin{cases} \sigma_{r(0)} \\ \sigma_{\theta(0)} \end{cases} = \begin{cases} \sigma_R \\ \frac{3}{2} \sigma_0 - \frac{1}{2} \sigma_R \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r^e \\ \varepsilon_\theta^e \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{E} [(\sigma_r - \sigma_0) - 2\mu(\sigma_\theta - \sigma_0)] \\ \frac{1}{E} [(1-\mu)(\sigma_\theta - \sigma_0) - \mu(\sigma_r - \sigma_0)] \end{cases} \quad (19)$$

式中: μ 、 E 分别为泊松比和弹性模量。

令每个球壳间的径向应力增量为

$$\Delta\sigma_r = \frac{p_i - \sigma_R}{n} \quad (20)$$

则第 $(i-1)$ 个球壳和第 i 个球壳的径向应力间的关系为

$$\sigma_{r(i)} = \sigma_{r(i-1)} + \Delta\sigma_r \quad (21)$$

对于充分大的 n 可以近似得到环向应力:

$$\sigma_{\theta(i)} = \sigma_{r(i)} + H(\sigma_{r(i)}, \gamma_{i-1}^p) \quad (22)$$

因此

$$\Delta\sigma_\theta = \sigma_{\theta(i)} - \sigma_{\theta(i-1)} \quad (23)$$

应用虎克定律可得

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon_{r(i)}^e \\ \Delta\varepsilon_{\theta(i)}^e \end{cases} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -2\mu \\ -\mu & 1-\mu \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta\sigma_{r(i)} \\ \Delta\sigma_{\theta(i)} \end{cases} \quad (24)$$

由于 n 充分大, 并且

$$\rho = r / R_p \quad (25)$$

由式 (16) 第一式与式 (3) 或式 (7) 得到

$$\frac{d\sigma_r}{d\rho} - 2 \frac{H(\sigma_r, \gamma^p)}{\rho} = 0 \quad (26)$$

对于式 (26) 利用差分形式可表示为

$$\frac{\sigma_{r(i)} - \sigma_{r(i-1)}}{\rho_{(i)} - \rho_{(i-1)}} - \frac{4H(\bar{\sigma}_{r(i)}, \gamma_{(i-1)}^p)}{\rho_{(i)} + \rho_{(i-1)}} = 0 \quad (27)$$

式中:

$$\bar{\sigma}_{r(i)} = (\sigma_{r(i)} + \sigma_{r(i-1)}) / 2 \quad (28)$$

则无量纲半径可表示为

$$\rho_{(i)} = \frac{4H(\bar{\sigma}_{r(i)}, \gamma_{(i-1)}^p) + \Delta\sigma_r}{4H(\bar{\sigma}_{r(i)}, \gamma_{(i-1)}^p) - \Delta\sigma_r} \rho_{(i-1)} \quad (29)$$

在塑性区, 总应变可以分解为弹性应变与塑性

应变：

$$\begin{cases} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{cases} = \begin{cases} \varepsilon_r^e \\ \varepsilon_\theta^e \end{cases} + \begin{cases} \varepsilon_r^p \\ \varepsilon_\theta^p \end{cases} \quad (30)$$

利用式 (27) 和式 (16) 第二式可以得到

$$\frac{d\varepsilon_\theta^p}{d\rho} + \frac{\varepsilon_\theta^p - \varepsilon_r^p}{\rho} = -\frac{d\varepsilon_\theta^e}{d\rho} - \frac{\varepsilon_\theta^e - \varepsilon_r^e}{\rho} \quad (31)$$

或者写为

$$\frac{d\varepsilon_\theta^p}{d\rho} + \frac{\varepsilon_\theta^p - \varepsilon_r^p}{\rho} = -\frac{d\varepsilon_\theta^e}{d\rho} - \frac{1+\mu}{E} \frac{H(\sigma_r, \gamma^p)}{\rho} \quad (32)$$

联立式 (32) 和式 (11), (24), (29) 可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta\rho_{(i)}} + (1+2k_{(i-1)}) \frac{1}{\bar{\rho}_{(i)}} \right) \Delta\varepsilon_{\theta(i)}^p = \\ & -\frac{\Delta\varepsilon_{\theta(i)}^e}{\Delta\rho_{(i)}} - \frac{1+\mu}{E} \frac{H(\bar{\sigma}_{r(i)}, \gamma_{(i-1)}^p)}{\bar{\rho}_{(i)}} - \frac{1}{\bar{\rho}_{(i)}} (\varepsilon_{\theta(i-1)}^p - \varepsilon_{r(i-1)}^p) \end{aligned} \quad (33)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_{(i)} &= (\rho_{(i-1)} + \rho_{(i)})/2 \\ k_{(i-1)} &= (1 + \sin\phi_{(i-1)})/(1 - \sin\phi_{(i-1)}) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

对应的 $\Delta\varepsilon_{r(i)}^p$ 可以通过式 (11) 求解, 因而偏塑性应变可更新为

$$\gamma_{(i)}^p = \gamma_{(i-1)}^p + (\Delta\varepsilon_{\theta(i)}^p - \Delta\varepsilon_{r(i)}^p) \quad (35)$$

第 i 个球壳的总应变为

$$\begin{cases} \varepsilon_{r(i)} \\ \varepsilon_{\theta(i)} \end{cases} = \begin{cases} \varepsilon_{r(i-1)} \\ \varepsilon_{\theta(i-1)} \end{cases} + \begin{cases} \Delta\varepsilon_{r(i)}^e \\ \Delta\varepsilon_{\theta(i)}^e \end{cases} + \begin{cases} \Delta\varepsilon_{r(i)}^p \\ \Delta\varepsilon_{\theta(i)}^p \end{cases} \quad (36)$$

由于 $\varepsilon_\theta = u/r$, 则无量纲化的位移可以通过式 (37) 求解 (此处无量纲化的位移即用 $U_{(i)} = u_{(i)}/R_p$ 来表示, 以利于叙述过程的简洁)。

$$U_{(i)} = \varepsilon_{\theta(i)} \rho_{(i)} \quad (37)$$

当计算进行到最后一步时此时的 $r_{(i)}$ 是容易得到的, 即为内半径 r_0 , 因而

$$R_p = \frac{r_0}{\rho_{(n)}} \quad (38)$$

由于上面的过程已得到每一步的 $U_{(i)}$, 从而径向位移就可以得到, 即

$$u_{(i)} = U_{(i)} R_p \quad (39)$$

根据上述求解过程的描述, 随着 n 的增加, 显然数值解会收敛到精确解。简要计算步骤如下:

计算准备: 计算 p_c , 若 $0 \leq p_i < p_c$, 则 $\sigma_R = p_c$; 若 $p_i \geq p_c$, 则没有塑性区形成, 整个区域都为弹性。

$$\Delta\sigma_r = (p_i - \sigma_R)/n \quad (40)$$

$$\sigma_{r(0)} = \sigma_R; \quad \sigma_{\theta(0)} = 3/2\sigma_0 - 1/2\sigma_R \quad (41)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{r(0)} = (\sigma_R - \sigma_0)/(2G) \\ \varepsilon_{\theta(0)} = (\sigma_0 - \sigma_R)/(4G) \end{cases} \quad (42)$$

$$\varepsilon_{r(0)}^p = 0; \quad \varepsilon_{\theta(0)}^p = 0; \quad \gamma_{(0)}^p = 0 \quad (43)$$

$$\rho_{(0)} = 1 \quad (44)$$

$$U_{(0)} = \varepsilon_{\theta(0)} \rho_{(0)} = \varepsilon_{\theta(0)} \quad (45)$$

$$\omega_{(0)} = \omega_p \quad (46)$$

式中: r_0 为球型洞室的半径; σ_0 洞室开挖前的初始应力; E 、 μ 分别为杨氏模量和泊松比; p_i 为球型洞室最内侧表面的压力; ω_p 、 ω_r 为参数的峰值和残余值 (对于 M-C 岩体, ω 代表 c 、 ϕ 、 ϕ ; 对 H-B 岩体, ω 代表 σ_c 、 m 、 s 、 ϕ); γ^{p*} 为临界偏塑性应变; n 为球腔划分数量。

塑性区各环的计算:

$$\sigma_{r(i)} = \sigma_{r(i-1)} + \Delta\sigma; \quad \bar{\sigma}_{r(i)} = (\sigma_{r(i)} + \sigma_{r(i-1)})/2 \quad (47)$$

$$H_{(i)} = H(\sigma_{r(i)}, \gamma_{(i-1)}^p); \quad \bar{H}_{(i)} = H(\bar{\sigma}_{r(i)}, \gamma_{(i-1)}^p) \quad (48)$$

$$\sigma_{\theta(i)} = \sigma_{r(i)} + H_{(i)} \quad (49)$$

$$\Delta\sigma_{r(i)} = \Delta\sigma_r; \quad \Delta\sigma_{\theta(i)} = \sigma_{\theta(i)} - \sigma_{\theta(i-1)} \quad (50)$$

$$\rho_{(i)} = \rho_{(i-1)} (4\bar{H}_{(i)} + \Delta\sigma_r)/(4\bar{H}_{(i)} - \Delta\sigma_r) \quad (51)$$

$$\Delta\rho_{(i)} = \rho_{(i)} - \rho_{(i-1)}; \quad \bar{\rho}_{(i)} = (\rho_{(i)} + \rho_{(i-1)})/2 \quad (52)$$

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon_{r(i)}^e \\ \Delta\varepsilon_{\theta(i)}^e \end{cases} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -2\mu \\ -\mu & 1-\mu \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta\sigma_{r(i)} \\ \Delta\sigma_{\theta(i)} \end{cases} \quad (53)$$

$$k_{(i-1)} = (1 + \sin \phi_{(i-1)}) / (1 - \sin \phi_{(i-1)})$$

$$\Delta \varepsilon_{\theta(i)}^p =$$

$$\frac{-\frac{\Delta \varepsilon_{\theta(i)}^e}{\Delta \rho_{(i)}} - \frac{1+\mu}{E} \frac{H(\bar{\sigma}_{r(i)}, \gamma_{(i-1)}^p)}{\bar{\rho}_{(i)}} - \frac{1}{\bar{\rho}_{(i)}} (\varepsilon_{\theta(i-1)}^p - \varepsilon_{r(i-1)}^p)}{\frac{1}{\Delta \rho_{(i)}} + (1+2k_{(i-1)}) \frac{1}{\bar{\rho}_{(i)}}} \quad (54)$$

$$\Delta \varepsilon_{r(i)}^p = -k_{(i-1)} \Delta \varepsilon_{\theta(i)}^p \quad (55)$$

$$\varepsilon_{r(i)}^p = \varepsilon_{r(i-1)}^p + \Delta \varepsilon_{r(i)}^p; \quad \varepsilon_{\theta(i)}^p = \varepsilon_{\theta(i-1)}^p + \Delta \varepsilon_{\theta(i)}^p \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{r(i)} &= \varepsilon_{r(i-1)} + \Delta \varepsilon_{r(i)}^e + \Delta \varepsilon_{r(i)}^p \\ \varepsilon_{\theta(i)} &= \varepsilon_{\theta(i-1)} + \Delta \varepsilon_{\theta(i)}^e + \Delta \varepsilon_{\theta(i)}^p \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\gamma_{(i)}^p = \gamma_{(i-1)}^p + (\Delta \varepsilon_{\theta(i)}^p - \Delta \varepsilon_{r(i)}^p) \quad (58)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{(i)} &= \varepsilon_{\theta(i)} \rho_{(i)}, \quad (0 < \gamma^p < \gamma^{p*}) \\ \omega_{(i)} &= \omega_p - (\omega_p - \omega_r), \quad (\gamma_{(i)}^p / \gamma^{p*}) \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{(i)} &= \omega_p - (\omega_p - \omega_r)(\gamma_{(i)}^p / \gamma^{p*}), \quad (0 < \gamma^p < \gamma^{p*}) \\ \omega_{(i)} &= \omega_r, \quad (\gamma^p \geq \gamma^{p*}) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

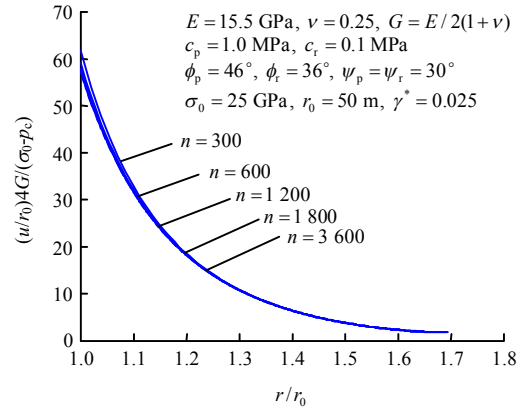
重复上面 14 步 n 次, 可得 $\sigma_{r(n)} = p_i$ 以及 $\rho_{(n)} = r_0 / R_p$, 所以就有 $R_p = r_0 / \rho_{(n)}$, 每一步的径向位移也就可以通过 $u_{(i)} = U_{(i)} R_p$ 得到。

4 数值结果及其分析

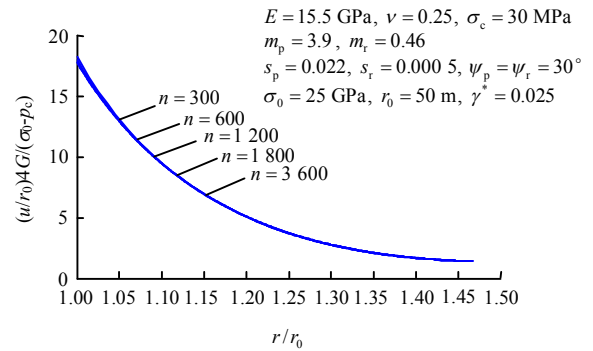
4.1 本文方法的收敛性

对于章节 3 中叙述的过程, 应用 Matlab 进行相应的程序编制, 分析计算结果之前, 首先要考查一下计算方法的正确性与收敛性, 这里分析了 M-C 准则和 H-B 准则作为屈服条件的 2 组数据, 临界剪切塑性应变均取为 0.025, 计算结果如图 4 所示。对于 M-C 岩体, 由图 4(a)可以看出, 当划分的球壳越多, 即随着 n 不断增大, 结果将收敛于一个稳定值, 此时可以认为它是收敛的。例如, 当 $n=600$ 时, $4uG(r_0(\sigma_0 - p_c)) = 59.0$; $n=1\,200$ 时, $4uG(r_0(\sigma_0 - p_c)) = 57.78$; $n=3\,600$ 时, $4uG(r_0(\sigma_0 - p_c)) = 57.1$, 则 $n=600$ 和 $n=1\,200$ 时的相对误差分别为 3.38% 和 2.20%, $n=1\,200$ 时数值结果是可以接受的。对于 H-B 岩体, 由图 4(b)可以看出结果也是在不断的收敛, 当 $n=600$, $4uG(r_0(\sigma_0 - p_c)) = 17.9$; $n=1\,200$ 时, $4uG(r_0(\sigma_0 - p_c)) = 17.86$ 。 $n=1\,200$ 时, $4uG(r_0(\sigma_0 - p_c)) = 17.77$, 则 $n=600$ 和 $n=1\,200$ 时的相对

误差分别为 1.24% 与 0.51%, 同样可以认为当 $n=1\,200$ 时结果是收敛的。



(a) M-C 岩体



(b) H-C 岩体

图 4 M-C 和 H-C 岩体的计算收敛图

Fig.4 Convergence of dimensionless displacement in plastic zone for M-C and H-B rock

4.2 结果对比与分析

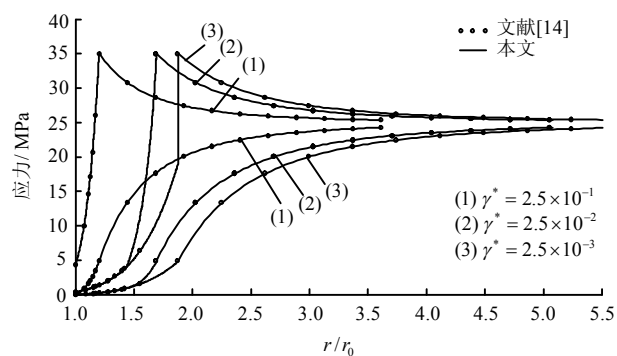
为了验证本文方法的正确性, 将本文计算的相关算例与已有文献的结果进行了对比。

4.2.1 M-C 岩体结果对比

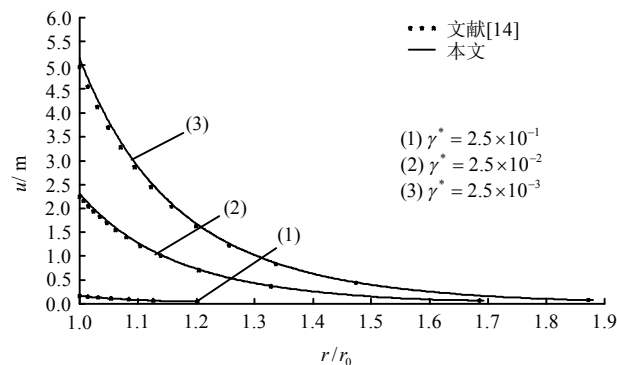
对于 M-C 软化岩体, 选择参数: $r_0 = 50$ m, $\sigma_0 = 25$ MPa, $p_i = 0$ MPa, $E = 15.5$ GPa, $\mu = 0.25$, $p_i = 0$ MPa, $\phi_p = 46^\circ$, $\phi_r = 36^\circ$, $\phi = 30^\circ$, $c_p = 1.0$ MPa, $c_r = 0.1$ MPa, $\gamma^* = 0.025$ 。

利用本文方法, 计算出的塑性半径为 84.7 m, 由文献[14]的计算的结果为 84.4 m, 误差为 0.27%。对于塑性区的位移, 取最内侧的点进行了计算, 采用无量纲量 $4uG(r_0(\sigma_0 - p_c)) = 57.0$, 而文献[14]的结果为 55.0, 误差为 3.63%。

径向应力和切向应力的对比如图 5(a)所示。选取了 3 个不同的临界剪切塑性应变, 分别为 0.250、0.025、0.002 5, 与文献[14]进行了对比, 结果一致。图 5(b)为不同软化速率所产生的位移的对比, 结果完全吻合。



(a) 岩体径向、切向应力的对比



(b) 岩体径向位移的对比

图 5 M-C 岩体径向、切向应力和径向位移的对比
Fig.5 Comparison of radial and tangential stresses, radial displacement for M-C rock

图 6 为 M-C 软化岩体的地层反应曲线, 对于理想弹脆塑性和理想弹塑性对应的解析解, 结果也完全一致。

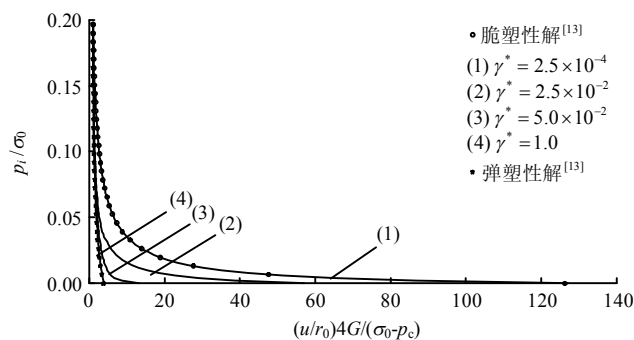


图 6 M-C 岩体的地层反应曲线
Fig.6 Ground reaction curves of strain-softening M-C rock mass

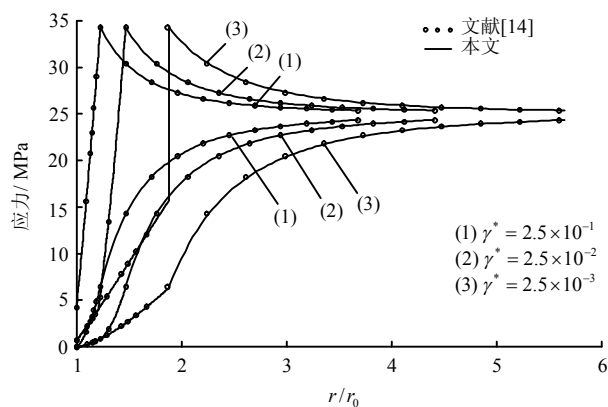
4.2.2 H-B 岩体结果对比

对于 H-B 软化岩体, 选择的参数为 $r_0 = 50$ m, $\sigma_0 = 25$ MPa, $E = 15.5$ MPa, $\mu = 0.25$, $\sigma_c = 30$ MPa, $m_p = 3.9$, $m_r = 0.46$, $s_p = 0.022$, $s_r = 0.0005$, $\phi_p = \phi_r = 30^\circ$, $\gamma^* = 0.025$ 。

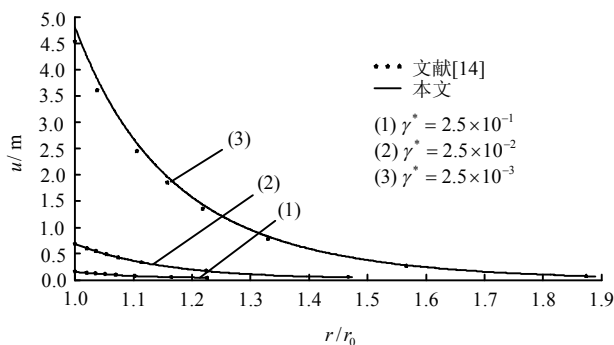
本文方法算得的塑性区半径和无量纲位移分别为 73.4 m 和 17.8, 文献[14]的结果为 73.6 和 18.6,

误差分别为 0.27%, 4.3%。

对于 H-B 软化岩体, 相应的应力和位移对比如图 7 所示。选择 3 个临界剪切塑性应变 (0.250, 0.025, 0.0025), 结果完全相同。图 8 为 H-B 软化岩体的地层反应曲线。同样对于理想弹脆塑性和理想弹塑性问题, 也非常一致。



(a) 岩体径向应力与切向应力对比



(b) 岩体径向位移对比

图 7 H-B 岩体径向、切向应力和径向位移的对比
Fig.7 Comparison of radial and tangential stresses, radial displacement for H-B rock

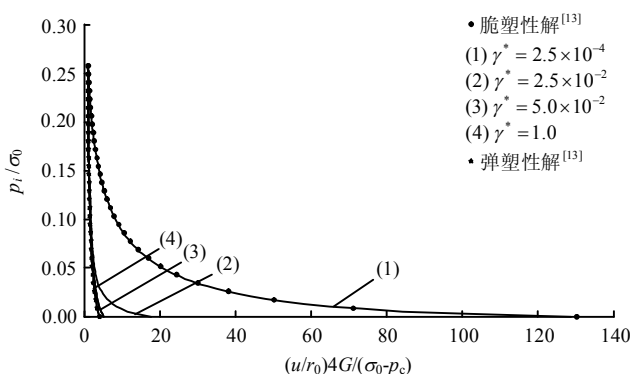


图 8 H-B 岩体的地层反应曲线
Fig.8 Ground reaction curves for strain-softening H-B rock mass

4.2.3 结果分析

对于 M-C 岩体, 从图 5、6 可见, 当软化速率不同时, 它们的塑性半径, 位移, 应力的行为将完

全不同, 当 $\gamma^* = 2.5 \times 10^{-4}$ 时, $r_p/r_0 = 1.88$, $(u/r_0)4G/(\sigma_0 - p_c) = 127$, 它的曲线非常接近理想弹脆塑性的值; 当 $\gamma^* = 2.5 \times 10^{-2}$ 时, $r_p/r_0 = 1.69$, $(u/r_0)4G/(\sigma_0 - p_c) = 57$; 当 $\gamma^* = 2.0 \times 10^{-2}$ 时, $r_p/r_0 = 1.74$, $(u/r_0)4G/(\sigma_0 - p_c) = 71$, 可见尽管软化速率的改变不大, 但结果仍旧有很大的差别, 所以软化速率对于结果的影响非常大, 当 $\gamma^* = 1.0$ 时, $r_p/r_0 = 1.19$, $(u/r_0)4G/(\sigma_0 - p_c) = 4$, 这时的曲线较为接近理想弹塑性。所以, 随着临界剪切塑性应变的减少, 软化行为逐渐向理想脆塑性过渡, 而临界剪切塑性应变的增加, 又将不断逼近理想弹塑性行为。因此, 当临界剪切塑性应变很小时 ($\gamma^* = 2.5 \times 10^{-4}$), 可以认为它是理想弹脆塑性的; 当临界剪切塑性应变足够大时 ($\gamma^* = 1.0$), 可以认为它是理想弹塑性的。对于 H-B 软化岩体, 同样符合上述趋势。

此外, 对上述具有应变软化行为的岩体, 与峰值相比, 残余强度值较小, 由图 6、8 呈现的变化规律表明, 径向位移会随着内压减小迅速增加, 尤其对于应变软化速率 (γ^* 较小) 较大的岩体, 在内压接近 0 时, 变形快速增加, 而施加较小的内压可以约束较大的位移。例如, 图 6 中当 $p_i/\sigma_0 = 0.057$ 时, 无量纲位移为 5.60; 当 $p_i/\sigma_0 = 0.0275$ 时, 无量纲位移为 13.20; 当 $p_i/\sigma_0 = 0.0039$ 时, 无量纲位移为 64.94。图 8 中当 $p_i/\sigma_0 = 0.0748$ 时, 无量纲位移为 12.63; 当 $p_i/\sigma_0 = 0.0361$ 时, 无量纲位移为 28.42; 当 $p_i/\sigma_0 = 0.0052$ 时, 无量纲位移为 84.33。由此可见, 选择合适的时机进行围岩支护, 既可以避免围岩体产生较大的变形, 又可以减少作用在支护结构上的压力。

4.2.4 CWFS 模型的应用

沈珠江院士^[17]认为岩土材料的抗剪强度由黏聚力和内摩擦力两部分组成, 凝聚力在变形不大时就达到峰值, 而摩擦力只有发生相当大的变形后才能充分发挥。Hajiabdolmajid 等^[18]采用不同的本构模型分析了地下实验室围岩破坏区与变形的分布, 其中黏聚力弱化与摩擦角强化 (CWFS) 模型得到的结果与围岩破坏区形态能较好地吻合。CWFS 模型与沈珠江院士关于强度参数演化规律的思想完全一致。

这里对一组强度参数遵循 CWFS (黏聚力弱化与摩擦角强化) 规律的围岩体内变形与应力等的分布进行了研究。计算参数: 隧洞半径 $r_0 = 1.75$ m, $E = 15$ GPa, 泊松比 $\mu = 0.2$, $c_p = 10$ MPa, $c_r = 0.1$ MPa, 摩擦角峰值和残余值分别为 $\phi_p = 22^\circ$, $\phi_r = 50^\circ$, 剪胀角 $\phi_p = 0$, $\phi_r = 0$ 。软化参数选为 $\gamma^* =$

0.003, 初始地应力 $\sigma_0 = 50$ MPa。

采用文中方法得到的计算结果如图 9~11 所示。为便于比较, 图中还给出了 1 组黏聚力与摩擦角同时弱化的计算结果, 对应的摩擦角为 $\phi_p = 50^\circ$, $\phi_r = 22^\circ$, 其他参数相同。

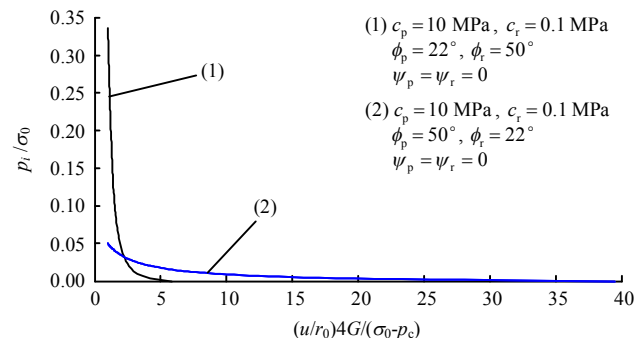


图 9 CWFS 模型与常规软化模型的地层反应曲线
Fig.9 Ground reaction curves of CWFS model and regular strain-softening model

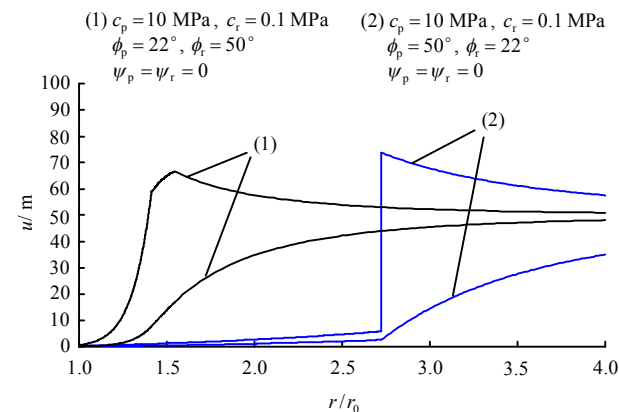


图 10 CWFS 模型与常规软化模型的应力变化曲线
Fig.10 Stress curves of CWFS model and regular strain-softening model

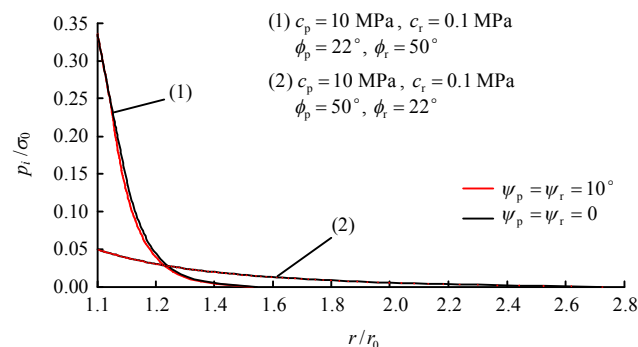


图 11 CWFS 模型与常规软化模型的塑性区变化曲线
Fig.11 Curves of plastic zone of CWFS model and regular strain-softening model

对 CWFS 模型, 由于峰值强度对应的摩擦角 ($\phi_p = 22^\circ$) 相对较小, 内压 $p_i = 16.81$ MPa 时围岩出现塑性区。对于常规应变软化模型 (黏聚力与摩擦角同时弱化), $\phi_p = 50^\circ$, 较 CWFS 模型中内摩擦角大, 围岩出现塑性区时对应的内压较小, $p_i =$

2.49 MPa 时围岩出现塑性区。但是, CWFS 模型中摩擦强度随变形增加其作用增强(即摩擦角随塑性变形的增加而增加), 围岩塑性区相对较小, 围岩的变形也较小。由图可见, CWFS 模型中应力变化较为平缓, 而常规软化模型中应力变化较为剧烈。

5 结 语

本文将文献[10]中的方法拓展到三维情形, 给出了求解均匀地应力场中球形洞室应变软化问题的差分方法, 编制了岩体服从 M-C 和 H-B 屈服准则的计算程序, 通过与已有计算结果比较, 验证了方法的正确性。对一组强度参数遵循 CWFS 规律的球形洞室围岩进行了分析, 得到了围岩体内塑性区、变形与应力等的分布。

通过与对应的常规应变软化模型的计算结果对比, 虽然 CWFS 模型中对应峰值点强度的摩擦角小于后者, 内压下降过程中, 围岩先进入塑性状态(即 CWFS 模型中围岩进入塑性状态的内压大于后者中的内压), 但内压完全释放后前者的塑性区范围反而较小, 相应的位移也较小。此外, CWFS 模型得到的应力变化更加平缓一些。

参 考 文 献

- [1] 赵启林, 牛海清, 卓家寿. 应变软化材料的几个基本问题研究进展[J]. 水利水运工程学报, 2001, (3): 73—77.
ZHAO Qi-lin, NIU Hai-qing, ZHUO Jia-shou. Basic problems of strain-softening material[J]. **Hydro-Science and Engineering**, 2001, (3): 73—77.
- [2] PREVOST J H, HOEK K. Soil mechanics and plasticity analysis of strain-softening[J]. **Geotechnique**, 1975, 25(2): 279—297.
- [3] BROWN E T, BRAY J W, LADANYI B, et al. Ground response curves for rock tunnels[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1983, 109: 15—39.
- [4] OGAWA T, LO K Y. Effects of dilatancy and yield criteria on displacements around tunnels[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1987, 24: 100—113.
- [5] YU Hai-hui. Cavity expansion methods in geomechanics[M]. Kluwer: Dordrecht, 2000.
- [6] SHARAN S K. Elastic-brittle-plastic analysis of circular openings in Hoek-Brown media[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2003, 40: 817—824.
- [7] SHARAN S K. Exact and approximate solutions for displacements around circular opening in elastic-brittle-plastic Hoek-Brown rock[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2005, 42: 542—549.
- [8] PARK K H, KIM Y J. Analytical solution for a circular opening in an elasto-brittle-plastic rock[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2006, 43: 616—622.
- [9] ALONSO E, ALEJANO L R, VARAS F, et al. Ground response curves for rock masses exhibiting strain-softening behavior[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2003, 27: 1153—1185.
- [10] LEE Y K, PIETRUSZCZAK S. A new numerical procedure for elasto-plastic analysis of a circular opening excavated in a strain-softening rock masses[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2008, 23: 588—599.
- [11] WANG S L, YIN X T, TANG H, et al. A new approach for analyzing circular tunnel in strain-softening rock masses[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2010, 47(1): 170—178.
- [12] LU Yan-er, YANG Wu. Analytical solutions of stress and displacement in strain-softening rock mass around a newly formed cavity[J]. **Journal of Central South University**, 2013, 20: 1397—1404.
- [13] WANG S L, YIN S D. A closed-form solution for a spherical cavity in the elastic-brittle-plastic medium[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2011, 26: 236—241.
- [14] WANG S L, YIN S D, WU Z J. Strain-softening analysis of a spherical cavity[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2012, 36: 182—202.
- [15] ZHENG H, LIU D F, LEE C F, et al. Principle of analysis of brittle-plastic rock mass[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2005, 42: 139—158.
- [16] CARRANZA-Torres, C. Elasto-plastic solution of tunnel problems using the generalized form of the Hoek-Brown failure criterion[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2004, 41: 480—481.
- [17] 沈珠江. 岩土破损力学: 理想脆弹塑性模型[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(3): 253—257.
SHEN Zhu-jiang. Breakage mechanics for geological materials: An ideal brittle-elasto-plastic model[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2003, 25(3): 253—257.
- [18] HAJIABDOLMAJID V, KAISER P K, MARTIN C D. Modelling brittle failure of rock[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2002, 39(6): 731—741.